Filtrations poly-adiques, standardité, complémentabilité, maximalité

Christophe Leuridan

Filtrations poly-adiques, standardité, complémentabilité, maximalité

Christophe Leuridan

2 juillet 2015

Résumé

Étant donnée une filtration $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ indexée par les entiers négatifs, nous introduisons la notion de complémentabilité pour les filtrations incluses dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Dans le cas de filtrations poly-adiques, nous définissons aussi la notion de maximalité, dont nous donnons plusieurs caractérisations. Nous montrons que toute filtration poly-adique complémentable dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ par une filtration kolmogorovienne est maximale dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Nous montrons que la réciproque est fausse, mais qu'une réciproque partielle est vraie. Cette réciproque partielle étend le théorème d'isomorphisme lacunaire de Vershik dans le cas des filtrations poly-adiques.

Classification mathématique : 60J05.
Mots-clés : filtrations à temps discret négatif, filtration de type produit, filtration standard, complémentabilité, maximalité, propriété d'échange.

Introduction

On se place sur un espace probabilisé standard de Borel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, autrement dit $\mathcal{A}$ est la tribu Borélienne associée à un espace polonais Ω. Notre étude porte sur les filtrations indexées par les entiers négatifs, les phénomènes intéressants se produisant près du temps $-\infty$. Nous travaillons modulo les événements négligeables : deux événements B et C seront dits égaux presque sûrement si $\mathbf{P}[B \triangle C] = 0$. Deux sous-tribus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ seront dites égales modulo $\mathbf{P}$ (ce que nous noterons $\mathcal{B} = \mathcal{C} \mod \mathbf{P}$) si tout événement de $\mathcal{B}$ est presque sûrement égal à un événement de $\mathcal{C}$ et vice-versa. Deux filtrations $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ seront dites égales modulo $\mathbf{P}$ si et seulement si pour tout $n \leq 0$, les tribus $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ sont égales modulo $\mathbf{P}$.

À toute suite $(X_n)_{n\leq 0}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, nous associons sa filtration naturelle $(\mathcal{F}^X_n)_{n\leq 0}$, définie par $\mathcal{F}^X_n = \sigma((X_k)_{k\leq n})$. On appellera filtration *de type produit* toute filtration qu'on peut écrire (modulo les événements négligeables) comme filtration naturelle d'une suite de variables aléatoires indépendantes.

Les filtrations de type produit sont les plus simples à appréhender. D'autres propriétés plus faibles sont intéressantes à considérer. Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est dite *kolmogorovienne* [1] lorsque sa tribu asymptotique

$$\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n\leq 0} \mathcal{F}_n$$

1. Cette terminologie a été introduite par S. Laurent en référence à la loi du $0-1$ de Kolmogorov.

ne contient que des événements de probabilité 0 ou 1 ; on dit aussi que $\mathcal{F}_{-\infty}$ est *triviale.* Une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ est dite *à accroissements indépendants* lorsqu'elle possède une *suite d'innovations*, c'est-à-dire s'il existe une suite $(I_n)_{n\leq 0}$ de variables aléatoires telles que pour tout $n \leq 0$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(I_n) \mod \mathbf{P}$, avec I_n indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$. Si de plus chaque variable aléatoire I_n est uniforme sur un ensemble fini de cardinal r_n, on dit que la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est $(r_n)_{n\leq 0}$*-adique.* Pour dire que $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ possède une suite des innovations qui sont uniformes sur des ensembles finis sans préciser leur taille, on dira que que $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est *poly-adique.*

Toute filtration de type produit est kolmogorovienne (d'après la loi du $0-1$ de Kolmogorov) et à accroissements indépendants, mais la réciproque est fausse. En particulier, des égalités du type $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(I_n) \mod \mathbf{P}$ pour tout $n \leq 0$, avec I_n indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}$, et le fait que la tribu asymptotique $\mathcal{F}_{-\infty}$ soit triviale ne garantissent pas que l'on ait $\mathcal{F}_n = \sigma((I_k)_{k\leq n}) \mod \mathbf{P}$ pour tout $n \leq 0$. Pire, il se peut que $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ ne soit pas de type produit, ce qui veut dire qu'aucune suite de variables indépendantes ne peut engendrer la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$.

Les premiers exemples de filtrations kolmogoroviennes poly-adiques qui ne sont pas de type produit ont été fournis par A. Vershik dans [15]. Vershik introduit la notion de filtration standard (qui pour les filtrations poly-adiques coïncide avec la notion de filtration de type produit) et fournit un critère permettant de montrer la standardité ou la non-standardité de certaines filtrations.

En fait, Vershik travaille avec des suites décroissantes (indexées par les entiers positifs) de partitions et non avec des filtrations à temps discret négatif, mais cela revient au même. La notion de standardité a été retranscrite en langage plus probabiliste par M. Émery et W. Schachermayer dans [6].

La majeure partie des problèmes concernant les filtrations indexées par les entiers négatifs vient de la non-distributivité du supremum de deux tribus par rapport à l'intersection dénombrable décroissante de tribus : étant donnée une sous-tribu $\mathcal{F}$ et une filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, l'inclusion

$$\mathcal{F} \vee \bigcap_{n\leq 0} \mathcal{G}_n \subset \bigcap_{n\leq 0} (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}_n)$$

peut être stricte modulo $\mathbf{P}$. Lorsqu'il y a égalité modulo $\mathbf{P}$, on dit que la *propriété d'échange* (de l'ordre entre le suprémum et l'intersection dénombrable) s'applique. C'est le cas lorsque les tribus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}_0$ sont indépendantes. La propriété d'échange a été étudiée dans [16] : H. von Weizsäcker donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle ait lieu. La propriété d'échange intervient dans de nombreuses situations (par exemple les chaînes de Markov cachées, voir [7]) et on ne sera pas surpris de la rencontrer ici.

La notion d'immersion de filtrations joue aussi un rôle crucial dans cette étude. Rappelons brièvement quelques faits utiles (on peut trouver un exposé plus complet dans [6]). Par définition, une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans une filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

— toute martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est aussi une martingale pour $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$;

— pour tout $n \leq 0$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$ et $\mathcal{F}_0$ est indépendante de $\mathcal{G}_n$ conditionnellement à $\mathcal{F}_n$;

— pour tout $n \leq 0$, pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-measurable X à valeurs dans un espace polonais, les lois conditionelles $\mathcal{L}(X|\mathcal{F}_n)$ et $\mathcal{L}(X|\mathcal{G}_n)$ sont presque sûrement égales.

Le lemme 5 de [6] montre que si $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$, alors pour tout

$n \leq 0$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{G}_n$; par conséquent, $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ and $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$ sont égales modulo $\mathbf{P}$ dès que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0 \mod \mathbf{P}$.

L'exemple non-trivial le plus simple d'immersion est obtenu par grossissement indépendant : si des filtrations $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{H}_n)_{n\leq 0}$ sont indépendantes, alors $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{F}_n \vee \mathcal{H}_n)_{n\leq 0}$.

Nous rencontrerons un autre exemple : si $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est incluse dans $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$, et si les filtrations $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$ possèdent une même suite d'innovations, alors $(\mathcal{F}_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{G}_n)_{n\leq 0}$.

Contenu de l'article

Dans le présent article, nous nous donnons une filtration $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ de l'espace probabilisé standard de Borel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Le fait de travailler sur des espaces polonais permet de définir des probabilités conditionnelles sur $\mathcal{A}$ (ou sur $\mathcal{Z}_0$). Cela entraîne aussi que $\mathcal{A}$ est essentiellement séparable : modulo les événements négligeables, on peut engendrer $\mathcal{A}$ par une suite d'événements de $\mathcal{A}$ (ou par une variable aléatoire réelle mesurable pour $\mathcal{A}$). Cela revient à dire que l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ est séparable. Ainsi, toute sous-tribu de $\mathcal{A}$ est encore essentiellement séparable.

Nous nous limitons souvent à des filtrations poly-adiques. Cette restriction simplifie notablement l'étude, notamment grâce au résultat suivant issu de la théorie de Vershik.

Théorème 1 (Vershik)**.** *Soit $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est une filtration de type produit telle que $\mathcal{Z}_0$ est essentiellement séparable. Alors toute filtration poly-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est de type produit.*

Nous introduisons des notions de complémentabilité (pour toutes les filtrations indexées par les entiers négatifs) et de maximalité (seulement pour les filtrations poly-adiques). Ces notions sont très proches des notions éponymes introduites dans le cadre des filtrations browniennes 1-dimensionnelles immergées dans la filtration d'un mouvement brownien plan (voir [3, 2]).

Jean-Paul Thouvenot m'a par ailleurs signalé l'analogie frappante avec les notions de complémentabilité et de maximalité qui existent depuis longtemps en théorie ergodique pour les facteurs d'un automorphisme (voir [12, 11]).

1. Complémentabilité. Dans la section 1, nous étudions la notion de complémentabilité. Étant donné une filtration incluse dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, nous nous intéressons d'abord à l'existence et aux propriétés d'un complément indépendant.

Définition 2. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration incluse dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. On dit que $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est complémentable dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ s'il existe une filtration $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ indépendante de $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ telle que $\mathcal{U}_n \vee \mathcal{V}_n = \mathcal{Z}_n \mod \mathbf{P}$ pour tout $n \leq 0$.*

Comme tout grossissement indépendant d'une filtration fournit une filtration dans laquelle la filtration initiale est immergée, il est nécessaire que $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ soit immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ pour qu'un tel complément existe.

Par ailleurs, si $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est complémentable dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, tous ses compléments sont isomorphes. Ce fait découle du lemme général suivant.

Proposition 3. *Soient $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ deux filtrations de $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, indépendantes et telles que $\mathcal{U}_0\vee\mathcal{V}_n=\mathcal{U}_0\vee\mathcal{Z}_n \mod \mathbf{P}$ pour tout $n\leq 0$. Soient U une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ engendrant la tribu $\mathcal{U}_0$, et $(\mathbf{P}_u)_{u\in E}$ une version régulière de la loi $\mathbf{P}$ sachant U. Alors pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u\in E$, l'espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{A},(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0},\mathbf{P}_u)$ est isomorphe[2] à l'espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{A},(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0},\mathbf{P})$. Ce résultat est valable en particulier lorsque $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ est un complément indépendant de $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.*

En particulier, si $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est complémentable par une filtration de type produit, alors $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est de type produit sous presque toutes les probablités $\mathbf{P}_u$. Nous montrons aussi que lorsque la filtration $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est poly-adique ou de type produit, toute filtration complémentable dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ et son complément le sont aussi.

Proposition 4. *Soit $(c_n)_{n\leq 0}$ une suite d'entiers ≥ 1. Soit $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(c_n)_{n\leq 0}$-adique telle que $\mathcal{Z}_0$ soit essentiellement séparable. Soient $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ deux filtrations indépendantes telles que $\mathcal{U}_n\vee\mathcal{V}_n=\mathcal{Z}_n \mod \mathbf{P}$ pour tout $n\leq 0$. Alors :*

1. *il existe deux suites $(a_n)_{n\leq 0}$ et $(b_n)_{n\leq 0}$ d'entiers ≥ 1, vérifiant $a_nb_n=c_n$ pour tout $n\leq 0$, telles que $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est $(a_n)_{n\leq 0}$-adique et $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ est $(b_n)_{n\leq 0}$-adique.*
2. *si $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est de type produit, alors $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ sont de type produit.*

La deuxième partie de la proposition 4 utilise le théorème de Vershik affirmant que toute filtration poly-adique immergée dans une filtration essentiellement séparable de type produit est aussi de type produit.

2. Maximalité. Dans la section 2, nous étudions la notion de maximalité pour des filtrations poly-adiques. Nous fixons une suite $(a_n)_{n\leq 0}$ d'entiers ≥ 1.

Définition 5. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. On dit que $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est maximale dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ si toute filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique contenant $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est presque sûrement égale à $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$.*

Nous montrons que toute filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est incluse dans une unique filtration maximale, que nous explicitons.

Théorème 6. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. pour tout $n\leq 0$, notons*

$$\mathcal{U}'_n=\bigcap_{s\leq 0}(\mathcal{Z}_s\vee\mathcal{U}_n)$$

alors :

1. *toute suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est encore une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$.*
2. *$(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$ est la plus grande filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique contenant $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Par conséquent, $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$ est maximale dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.*

Remarque 7. *Si l'on pose recommence la construction précédente à partir de la filtration $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$, on retombe sur la filtration $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$. Autrement dit, pour tout $n\leq 0$*

$$\bigcap_{s\leq 0}(\mathcal{Z}_s\vee\mathcal{U}'_n)=\mathcal{U}'_n.$$

Il s'agit d'une vraie égalité, et non seulement d'une égalité modulo $\mathbf{P}$.

2. Voir la définition d'un isomorphisme d'espace probabilisé filtré dans [1] ou [6]

Le théorème 6 permet de montrer plusieurs caractérisations de la maximalité.

Corollaire 8. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Soient U une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ engendrant la tribu $\mathcal{U}_0$, et $(\mathbf{P}_u)_{u\in E}$ une version régulière de la loi $\mathbf{P}$ sachant U. Considérons les assertions*

1. *$(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est maximale dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.*
2. *Pour tout $n \leq 0$, $\mathcal{U}_n = \bigcap_{s\leq 0}(\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_n) \mod \mathbf{P}$.*
3. *$\mathcal{U}_0 = \bigcap_{s\leq 0}(\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_0) \mod \mathbf{P}$.*
4. *$U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$, $\mathbf{P}_u$ est triviale sur $\mathcal{Z}_{-\infty}$.*

Alors $(1) \iff (2) \iff (3) \Longleftarrow (4)$.

Si l'on suppose que pour tout $s \leq 0$, $\mathcal{Z}_s$ est $(\mathbf{P}_u)_{u\in E}$-séparable (il existe une sous-tribu $\mathcal{H}_s$ de $\mathcal{Z}_0$, engendrée par une famille dénombrable d'événements, telle que pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$, $\mathcal{Z}_s = \mathcal{H}_s \mod \mathbf{P}_u$), on a également $(3) \Longrightarrow (4)$.

Notons qu'on a toujours

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{Z}_{-\infty} \vee \mathcal{U}_0 \subset \bigcap_{s\leq 0}(\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_0).$$

Donc la condition (3) peut-être décomposée en deux sous-conditions :

— $(3a)$ l'inclusion $\mathcal{Z}_{-\infty} \subset \mathcal{U}_0 \mod \mathbf{P}$,

— $(3b)$ la propriété d'échange pour la tribu $\mathcal{U}_0$ et la filtration $(\mathcal{Z}_s)_{s\leq 0}$.

Les conditions $(3b)$ and (4) ci-dessus sont les reformulations dans notre cadre des conditions (a) and (e) du théorème 1 of [16]. L'implication $(4) \Longrightarrow (3)$ ne provient pas théorème 1 of [16], mais se prouve facilement, nous la montrons donc directement. La réciproque partielle $(3) \Longrightarrow (4)$ sous l'hypothèse supplémentaire de $(\mathbf{P}_u)_{u\in E}$-separabilité des tribus $\mathcal{Z}_s$ est plus subtile et découle de l'implication $(a) \Longrightarrow (e)$ du théorème 1 de [16]. Nous ne l'utiliserons pas dans la suite. Notons que la $(\mathbf{P}_u)_{u\in E}$-separabilité n'est pas entraînée par la $\mathbf{P}$-separabilité.

Compte tenu de la proposition 3, cette caractérisation fournit une condition nécessaire pour la complémentabilité par une filtration kolmogorovienne.

Corollaire 9. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Si $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est complémentable par une filtration kolmogorovienne, alors $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est maximale dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.*

La caractérisation de la maximalité vue au corollaire 8 montre aussi que la notion de maximalité est invariante par extraction.

Corollaire 10. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration poly-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Soit $(t_n)_{n\leq 0}$ une subdivision de $\mathbf{Z}_-$. Alors $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est maximale dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ si et seulement si $(\mathcal{U}_{t_n})_{n\leq 0}$ est maximale dans $(\mathcal{Z}_{t_n})_{n\leq 0}$.*

En effet, cela découle simplement des égalités $\mathcal{U}_{t_0} = \mathcal{U}_0$ et

$$\bigcap_{m\leq 0}(\mathcal{Z}_{t_m} \vee \mathcal{U}_{t_0}) = \bigcap_{s\leq 0}(\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_0).$$

3. Contre-exemples à la réciproque du corollaire 9. La réciproque est fausse du corollaire 9, et nous donnons deux contre-exemples à la section 3.

L'un des contre-exemples est le processus des mots découpés dyadique randomisé. Il s'agit d'une variante du processus des mots découpés dyadique, introduit par M. Smorodinsky dans [13] et lui-même inspiré de l'exemple 3 de Vershik dans [15]. Les processus des mots découpés poly-adiques ont été étudié par la suite par S. Laurent [8] et G. Ceillier [4].

L'autre contre-exemple, qui utilise les corps finis, est une variante d'un exemple paru dans l'article [5], lui-même inspiré de travaux non publiés de Tsirelson [14].

Pour montrer que ce sont bien des contre-exemples, on utilise les propositions 3 et 4, ainsi que l'implication (4) $\Longrightarrow$ (1) du corollaire 8 énoncé plus haut.

4. Pseudo-distances de Kantorovitch - Rubinstein. Bien que la réciproque du corollaire 9 soit fausse, on a une réciproque partielle. La démonstration de cette dernière utilise de nombreux résultats sur les distances de Kantorovitch - Rubinstein, que nous établissons dans la section 4.

5. Complémentabilité par morceaux. Dans la section 5, nous montrons une réciproque partielle au corollaire 9.

Théorème 11. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration maximale dans une filtration poly-adique $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Il existe une subdivision $(t_n)_{n\leq 0}$ de $\mathbf{Z}_-$ telle que la filtration $(\mathcal{U}_{t_n})_{n\leq 0}$ soit complémentable par une filtration de type produit dans la filtration $(\mathcal{Z}_{t_n})_{n\leq 0}$.*

Ce théorème généralise le théorème d'isomorphisme lacunaire de Vershik [15] dans le cas des filtrations poly-adiques : il suffit de prendre toutes les tribus $\mathcal{U}_n$ égales à la tribu triviale, et donc $a_n = 1$ pour tout $n \leq 0$. Néanmoins, le théorème ci-dessus ne se déduit pas facilement du théorème d'isomorphisme lacunaire.

Compte tenu des contre-exemples donnés à la section 3, le théorème ci-dessus montre que la complémentabilité n'est pas une notion invariante par extraction, à la différence de la maximalité.

1 Complémentabilité

1.1 Preuve de la proposition 3

Nous renvoyons le lecteur à [1] ou [6] pour la définition des isomorphismes.

Pour $n \leq 0$, notons V_n et Z_n des variables aléatoires engendrant $\mathcal{V}_n$ et $\mathcal{Z}_n$ (modulo $\mathbf{P}$). Comme $\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_0 \vee \mathcal{Z}_n \mod \mathbf{P}$, on a $\mathbf{P}$-presque sûrement $Z_n = f_n(U, V_n)$ pour une certaine fonction mesurable f_n et $V_n = g_n(U, Z_n)$ pour une certaine fonction mesurable g_n. Ces égalités sont donc vraies $\mathbf{P}_u$-presque sûrement pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$.

Par ailleurs, les variables U et V_0 sont indépendantes, donc pour presque tout $u \in E$, la loi de V_0 sous $\mathbf{P}_u$ coïncide avec la loi de V_0 sous $\mathbf{P}$.

Notons E' l'ensemble des $u \in E$ tels que :

1. V_0 ait même loi sous $\mathbf{P}_u$ que sous $\mathbf{P}$
2. pour tout $n \leq 0$, $Z_n = f_n(U, V_n)$ $\mathbf{P}_u$-presque sûrement.

3. pour tout $n \leq 0$, $V_n = g_n(U, Z_n)$ $\mathbf{P}_u$-presque sûrement.

Alors $U(\mathbf{P})(E') = 1$.

Fixons maintenant $u \in E'$. Notons $\mathcal{L}^0(\mathcal{V}_0, \mathbf{P})$ l'espace des variables aléatoires réelles $\mathcal{V}_0$-mesurables et $L^0(\mathcal{V}_0, \mathbf{P})$ son quotient par l'égalité $\mathbf{P}$-presque sûre, et définissons $L^0(\mathcal{Z}_0, \mathbf{P}_u)$ de la même façon.

Comme V_0 engendre $\mathcal{V}_0$, toute variable aléatoire $\mathcal{V}_0$-mesurable a même loi sous $\mathbf{P}$ et sous $\mathbf{P}_u$. On en déduit que l'application qui à $X \in \mathcal{L}^0(\mathcal{V}_0, \mathbf{P})$ associe $X \in \mathcal{L}^0(\mathcal{Z}_0, \mathbf{P}_u)$ passe au quotient et définit un morphisme (pour la composition par les fonctions boréliennes de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{R}$) injectif Ψ de $L^0(\mathcal{V}_0, \mathbf{P})$ dans $L^0(\mathcal{Z}_0, \mathbf{P}_u)$.

Il reste à voir que pour tout $n \leq 0$, l'image par Ψ de $L^0(\mathcal{V}_n, \mathbf{P})$ est exactement $L^0(\mathcal{Z}_n, \mathbf{P}_u)$. L'inclusion $\Psi(L^0(\mathcal{V}_n, \mathbf{P})) \subset L^0(\mathcal{Z}_n, \mathbf{P}_u)$ découle des égalités $\mathbf{P}_u$-presque sûres $V_n = g_n(U, Z_n) = g_n(u, Z_n)$. L'inclusion réciproque découle des égalités $\mathbf{P}_u$-presque sûres $Z_n = f_n(U, V_n) = f_n(u, V_n)$.

1.2 Preuve de la proposition 4

Nous démontrons d'abord une caractérisation des filtrations $(c_n)_{n\leq 0}$-adiques.

Lemme 12. *Soit $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ une filtration dont la tribu finale $\mathcal{Z}_0$ est essentiellement séparable. Pour tout $n \leq 0$, notons R_n une variable aléatoire réelle engendrant $\mathcal{Z}_n$. Il y a équivalence entre*

1. *La filtration $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est $(c_n)_{n\leq 0}$-adique.*
2. *Pour tout $n \leq 0$, presque sûrement, la loi conditionnelle $\mathcal{L}(R_n|\mathcal{Z}_{n-1})$ est uniforme sur un ensemble fini de cardinal c_n.*

Démonstration. Il s'agit en fait d'une propriétés des filtrations à deux instants. Fixons $n \leq 0$.

Si $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{n-1} \vee \sigma(I_n) \mod \mathbf{P}$, avec I_n indépendante de $\mathcal{Z}_{n-1}$ et de loi uniforme sur $[\![1, c_n]\!]$, alors il existe des applications mesurables f_n et g_n telles que $R_n = f_n(R_{n-1}, I_n)$ et $I_n = g_n(R_n)$ presque sûrement. Presque sûrement, $\mathcal{L}(R_n|\mathcal{Z}_{n-1})$ est donc l'image par $f_n(R_{n-1}, \cdot)$ de la loi uniforme sur $[\![1, c_n]\!]$; inversement, la loi uniforme sur $[\![1, c_n]\!]$ est l'image par g_n de $\mathcal{L}(R_n|\mathcal{Z}_{n-1})$. Ainsi, presque sûrement, $\mathcal{L}(R_n|\mathcal{Z}_{n-1})$ est uniforme sur un ensemble fini de cardinal c_n.

Réciproquement, supposons que presque sûrement, $\mathcal{L}(R_n|\mathcal{Z}_{n-1})$ est uniforme sur un ensemble fini de cardinal c_n. Notons $X_1 < \ldots < X_{c_n}$ les atomes de cette loi rangés par ordre croissant. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{c_n}$ sont mesurables pour $\mathcal{Z}_{n-1}$, et $R_n \in \{X_1, \ldots, X_{c_n}\}$ presque sûrement. Notons alors I_n l'unique indice $i \in [\![1, c_n]\!]$ tel que $R_n = X_i$. Alors pour tout $i \in [\![1, c_n]\!]$,

$$\mathbf{P}[I_n = i|\mathcal{Z}_{n-1}] = \mathbf{P}[R_n = X_i|\mathcal{Z}_{n-1}] = 1/c_n,$$

ce qui montre que I_n est indépendante de $\mathcal{Z}_{n-1}$ et de loi uniforme sur $[\![1, c_n]\!]$. De plus, $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{n-1} \vee \sigma(I_n) \mod \mathbf{P}$, car I_n est mesurable pour $\mathcal{Z}_n$ (modulo les événements négligeables) et $R_n = X_{I_n}$ presque sûrement. □

Nous pouvons maintenant montrer la proposition 4.

Démonstration. Il s'agit encore d'une propriétés des filtrations à deux instants.

Fixons $n \leq 0$. Notons U_n et V_n des variables aléatoires réelles engendrant $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$ (modulo $\mathbf{P}$). Par indépendance de $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V}_n$, on a presque sûrement

$$\mathcal{L}((U_n, V_n)|\mathcal{Z}_{n-1}) = \mathcal{L}(U_n|\mathcal{U}_{n-1}) \otimes \mathcal{L}(V_n|\mathcal{V}_{n-1}).$$

Mais comme (U_n, V_n) engendre $\mathcal{Z}_n$ (modulo $\mathbf{P}$), le lemme 12 assure que la loi conditionnelle $\mathcal{L}((U_n, V_n)|\mathcal{Z}_{n-1})$ est presque sûrement une loi uniforme sur un ensemble fini C_n à c_n éléments.

Donc les lois $\mathcal{L}(U_n|\mathcal{U}_{n-1})$ et $\mathcal{L}(V_n|\mathcal{V}_{n-1})$ sont presque sûrement uniformes sur un des ensembles aléatoires finis A_n et B_n dont le produit cartésien est C_n. Les cardinaux de A_n et B_n sont des variables aléatoires indépendantes dont le produit vaut c_n, ils sont donc presque sûrement constants. Notons a_n et b_n ces constantes.

Le lemme 12 montre que les filtrations $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ sont respectivement $(a_n)_{n\leq 0}$-adique et $(b_n)_{n\leq 0}$-adique. Comme elles sont immergées dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, le théorème de Vershik (rappelé dans l'introduction) assure que si $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ est de type produit, alors $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ le sont aussi. □

2 Maximalité

2.1 Preuve du théorème 6 et de la remarque 7

Commençons par établir un lemme général pour deux filtrations $(a_n)_{n\leq 0}$-adiques immergées l'une dans l'autre.

Lemme 13. *Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$ deux filtrations $(a_n)_{n\leq 0}$-adiques. On suppose que $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$. Alors toute suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est aussi une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$.*

Démonstration. Soit $(U_n)_{n\leq 0}$ une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$. Quitte à composer chaque U_n avec une bijection déterministe, on peut supposer que U_n est à valeurs dans $[\![1, a_n]\!]$. Par immersion de $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ dans $(\mathcal{X}_n)_{n\geq 0}$, on a presque sûrement

$$\mathcal{L}(U_n|\mathcal{X}_{n-1}) = \mathcal{L}(U_n|\mathcal{U}_{n-1}) = \mathrm{Unif}([\![1, a_n]\!]),$$

donc U_n est indépendante de $\mathcal{Z}_{n-1}$.

Soit (X_n) une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$, à valeurs dans les ensembles $([\![1, a_n]\!])_{n\leq 0}$. Pour chaque $n \leq 0$, notons ξ_n une variable aléatoire réelle engendrant $\mathcal{X}_n$ (modulo $\mathbf{P}$). Comme U_n est mesurable pour $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{X}_n = \sigma(\xi_{n-1}) \vee \sigma(X_n)$ mod $\mathbf{P}$, il existe une fonction mesurable h_n de $\mathbf{R} \times [\![1, a_n]\!]$ dans $[\![1, a_n]\!]$ telle que $U_n = h_n(\xi_{n-1}, X_n)$ presque sûrement. Donc, presque sûrement,

$$\mathcal{L}(U_n|\mathcal{X}_{n-1}) \text{ est l'image par } h_n(\xi_{n-1}, \cdot) \text{ de } \mathrm{Unif}([\![1, a_n]\!])).$$

Ainsi, presque sûrement, l'application $h_n(\xi_{n-1}, \cdot)$ est une permutation de $[\![1, a_n]\!]$ et $X_n = h_n(\xi_{n-1}, \cdot)^{-1}(U_n)$. Les égalités $\mathcal{X}_n = \sigma(\xi_{n-1}) \vee \sigma(X_n) = \sigma(\xi_{n-1}) \vee \sigma(U_n) \mod \mathbf{P}$ montrent que $(U_n)_{n\leq 0}$ est une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$. □

Nous pouvons maintenant montrer le théorème 6.

Démonstration. Pour $n \leq 0$ fixé, on vérifie directement les inclusions $\mathcal{U}'_{n-1} \subset \mathcal{U}'_n$ et $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}'_n \subset \mathcal{Z}_n \vee \mathcal{U}_n = \mathcal{Z}_n$. Donc $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$ est une filtration contenant $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et contenue dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.

Soit $(U_n)_{n\leq 0}$ une suite d'innovations pour la filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$. Par hypothèse et par immersion de $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, U_n suit la loi uniforme sur un ensemble fini A_n de cardinal a_n, et

$$\mathcal{L}(U_n|\mathcal{Z}_{n-1}) = \mathcal{L}(U_n|\mathcal{U}_{n-1}) = \mathrm{Unif}(A_n),$$

donc U_n est indépendante de $\mathcal{Z}_{n-1}$ et *a fortiori* de $\mathcal{U}'_{n-1}$. On peut donc appliquer la propriété d'échange (définie à la fin de l'introduction) à la tribu $\sigma(U_n)$ et à la filtration $(\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_{n-1})_{s\leq n-1}$ et écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}'_n = \bigcap_{s\leq n-1} (\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_n) &= \bigcap_{s\leq n-1} (\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_{n-1} \vee \sigma(U_n)) \mod \mathbf{P} \\
&= \bigcap_{s\leq n-1} (\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_{n-1}) \vee \sigma(U_n) \mod \mathbf{P} \\
&= \mathcal{U}'_{n-1} \vee \sigma(U_n) \mod \mathbf{P}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(U_n)_{n\leq 0}$ est une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$, qui est donc $(a_n)_{n\leq 0}$-adique.

Pour montrer que $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, il suffit de montrer que pour tout $n \leq 0$ et pour toute variable aléatoire $R \in L^1(\mathcal{U}'_0)$, $\mathbf{E}[R|\mathcal{Z}_n] = \mathbf{E}[R|\mathcal{U}'_n]$. Comme $\mathcal{U}'_0 = \mathcal{U}'_n \vee \sigma(U_{n+1}, \dots, U_0)$, il suffit de considérer les variables aléatoires de la forme $R = R_1 R_2$ avec R_1 mesurable pour $\mathcal{U}'_n$ et $R_2 \in L^1(\sigma(U_{n+1}, \dots, U_0))$. Dans ce cas, on a

$$\mathbf{E}[R|\mathcal{Z}_n] = R_1 \mathbf{E}[R_2|\sigma(\mathcal{Z}_n)] = R_1 \mathbf{E}[R_2],$$

qui est mesurable pour $\mathcal{U}'_n$, ce qui montre l'égalité voulue.

Soit $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique contenant $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. On vérifie facilement que $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$. D'après le lemme 13, $(U_n)_{n\leq 0}$ est une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{X}_n)_{n\leq 0}$. Pour tout $s \leq n \leq 0$, on a donc

$$\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_s \vee \sigma(U_{s+1}, \dots, U_n) \subset \mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_n \mod \mathbf{P}.$$

En prenant l'intersection sur s, on obtient $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{U}'_n$, ce qui achève la preuve. □

Pour montrer la remarque 7, on écrit que pour tout $n \leq 0$ et $s \leq 0, \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}'_n \subset \mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_n$, d'où $\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_n = \mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}'_n$. En prenant l'intersection sur $s \leq 0$, on obtient le résultat.

2.2 Preuve des corollaires 8 et 9

Montrons d'abord le corollaire 8, en reprenant les notations du théorème 6.

Démonstration. L'équivalence entre les points 1 (maximalité de $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$), 2 (égalité des filtrations $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{U}'_n)_{n\leq 0}$) et 3 (égalité entre $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}'_0$) découle du théorème 6 et du fait que deux filtrations immergées l'une dans l'autre sont égales dès que leurs tribus finales sont égales (voir [6], lemme 5).

Preuve de l'implication (4) $\implies$ (3)**.** Supposons que pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$, $\mathbf{P}_u$ est triviale sur $\mathcal{Z}_{-\infty}$. Il s'agit de montrer que $\mathcal{U}'_0 \subset \mathcal{U}_0 \mod \mathbf{P}$.

Soit $X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{U}'_0)$. Pour tout $s \leq 0$, notons R_s une variable aléatoire réelle engendrant $\mathcal{Z}_s$ (modulo $\mathbf{P}$). Comme $\mathcal{U}'_0 \subset \mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_0 = \sigma(R_s, U) \mod \mathbf{P}$, on a $X = f_s(R_s, U)$ $\mathbf{P}$-presque sûrement pour une certaine fonction mesurable f_s.

Notons E' l'ensemble des $u \in E$ tels que $\mathbf{P}_u$ soit triviale sur $\mathcal{Z}_{-\infty}$ et tels que pour tout $n \leq 0$, $\mathbf{P}_u[X = f_s(R_s, u)] = 1$. Alors $U(\mathbf{P})(E') = 1$.

Fixons $u \in E'$. La variable aléatoire $X_u = \limsup_{s \to -\infty} f_s(R_s, u)$ est mesurable pour $\mathcal{Z}_{-\infty}$, donc $\mathbf{P}_u$-presque sûrement constante. Or $X = X_u$ $\mathbf{P}_u$-presque sûrement. Donc $X = \mathbf{E}_u[X]$ $\mathbf{P}_u$-presque sûrement.

Ainsi, $X = \mathbf{E}[X|\mathcal{U}_0]$ presque sûrement, ce qui montre l'inclusion $\mathcal{U}'_0 \subset \mathcal{U}_0 \mod \mathbf{P}$.

Preuve de l'implication (3) $\Rightarrow$ (4) **sous l'hypothèse supplémentaire.** Supposons que les tribus $(\mathcal{Z}_s)_{s \leq 0}$ soient conditionnellement séparables par rapport à $(\mathbf{P}_u)_{u \in E}$ et que la condition (3) est vérifiée. La condition (3) entraîne l'inclusion $\mathcal{Z}_{-\infty} \subset \mathcal{U}_0 \mod \mathbf{P}$ et le fait que la tribu $\mathcal{U}_0$ et la filtration $(\mathcal{Z}_s)_{s \leq 0}$ vérifient la propriété d'échange

$$\mathcal{Z}_{-\infty} \vee \mathcal{U}_0 = \bigcap_{s \leq 0} (\mathcal{Z}_s \vee \mathcal{U}_0) \mod \mathbf{P}.$$

L'implication $(a) \Rightarrow (d)$ du théorème 1 de [16] assure que la tribu $\mathcal{Z}_{-\infty}$ elle aussi est conditionnellement séparable par rapport à $(\mathbf{P}_u)_{u \in E}$: il existe une sous-tribu $\mathcal{H}$ de $\mathcal{Z}_{-\infty}$, engendrée par une suite d'événements, telle que pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$, $\mathcal{Z}_{-\infty} = \mathcal{H} \mod \mathbf{P}_u$. Il suffit donc de montrer que pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$, $\mathbf{P}_u$ est triviale sur $\mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}$ est séparable, il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{H}$ et pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$, $\mathbf{P}_u(A) \in \{0, 1\}$. Mais comme $A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{Z}_{-\infty}$ et $\mathcal{Z}_{-\infty} \subset \mathcal{U}_0 \mod \mathbf{P}$, on a $\mathbf{P}_U(A) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{U}_0] = \mathbf{1}_A$ $\mathbf{P}$-presque sûrement, ce qui montre le résultat. □

Montrons maintenant le corollaire 9

Démonstration. Supposons que la filtration $(\mathcal{U}_n)_{n \leq 0}$ admette un complément indépendant $(\mathcal{V}_n)_{n \leq 0}$ dans $(\mathcal{Z}_n)_{n \leq 0}$. Pour tout $s \leq 0$, $\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{Z}_s = \mathcal{U}_0 \vee \mathcal{U}_s \vee \mathcal{V}_s = \mathcal{U}_0 \vee \mathcal{V}_s \mod \mathbf{P}$. Par indépendance, la tribu $\mathcal{U}_0$ et la filtration $(\mathcal{V}_n)_{n \leq 0}$ vérifient la propriété d'échange. On a donc

$$\bigcap_{s \leq 0} (\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{Z}_s) = \bigcap_{s \leq n} (\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{V}_s) = \mathcal{U}_0 \vee \mathcal{V}_{-\infty} \mod \mathbf{P}.$$

Si $(\mathcal{V}_n)_{n \leq 0}$ est kolmogorovienne, la propriété (3) du corollaire 8 est vérifiée, ce qui montre la maximalité de $(\mathcal{U}_n)_{n \leq 0}$. □

3 Contre-exemples à la réciproque du corollaire 9

Nous donnons deux contre-exemples où une filtration poly-adique est maximale dans une filtration poly-adique, mais ne possède pas de complément indépendant. La preuve de la maximalité utilise la caractérisation vue dans le corollaire 8 et la preuve de la non-complémentabilité utilise la proposition 3.

Les deux constructions reposent sur le résultat suivant.

Proposition 14. *Soient $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ une filtration de type produit et $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Soient U une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ telle que $\sigma(U) = \mathcal{U}_0 \mod \mathbf{P}$ et $(\mathbf{P}_u)_{u\in E}$ une version régulière de la loi conditionnelle $\mathbf{P}$ sachant U. Si pour $U(\mathbf{P})$-presque tout $u \in E$, la filtration $\mathcal{Z}$ est kolmogorovienne mais non de type produit sous $\mathbf{P}_u$, alors $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est maximale mais non complémentable dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.*

Démonstration. La maximalité de $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ découle de la charactérisation donnée par le corollary 8. La non-complementabilité se montre par l'absurde : si la filtration $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ possédait un complément indépendant $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, alors $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ serait de type produit d'après la proposition 4. Mais en même temps, la proposition 3 dirait que pour $U(\mathbf{P})$-presque tout u, la filtration $(\mathcal{V}_n)_{n\leq 0}$ vue sous $\mathbf{P}$ serait isomorphe à $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ vue sous $\mathbf{P}_u$, ce qui mènerait à une contradiction. □

3.1 Mots découpés dyadiques randomisés

Le résultat principal de cette sous-section (proposition 17) repose sur la non-standardité de la filtration des mots découpés dyadiques (voir [13] or [4]).

Pour tout $n \leq 0$, notons E_n l'ensemble des parties de $[\![1, 2^{|n|+1}]\!]$ à $2^{|n|}$ éléments. Cet ensemble a pour cardinal $c_n = \binom{2^{|n|+1}}{2^{|n|}}$.

Définition 15. *On appelle processus de mots découpés dyadiques randomisés sur l'alphabet $\{a,b\}$ toute chaîne de Markov $(W_n, I_n)_{n\leq 0}$ inhomogène où pour tout $n \leq 0$*

1. *(W_n, I_n) suit la loi uniforme sur $\{a,b\}^{2^{|n|}} \times E_n$,*
2. *I_n est indépendante de (W_{n-1}, I_{n-1}),*
3. *W_n est obtenu à partir de W_{n-1} en ne gardant que les lettres d'indice dans I_n.*

Plus précisément, si $W_{n-1} = (x_1, \dots, x_{2^{|n|+1}})$ et si $i_1 < \dots < i_{2^{|n|}}$ sont les éléments de I_n, alors $W_n = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{2^{|n|}}})$.

L'existence et l'unicité en loi d'une telle chaîne de Markov $(W_n, I_n)_{n\leq 0}$ vient du fait que la famille des lois uniformes sur les ensembles $(\{a,b\}^{2^{|n|}} \times E_n)_{n\leq 0}$ est une loi d'entrée pour les noyaux de transition décrits par les conditions 2 et 3. Les conditions 2 et 3 montrent que la suite $(I_n)_{n\leq 0}$ est une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{F}^{W,I})_{n\leq 0}$, qui est donc $(c_n)_{n\leq 0}$-adique.

Comme dans le processus de mots découpés dyadiques, W_n contient la moitié des lettres de W_{n-1}. Mais ici les lettres sont sélectionnées à l'aide d'une partie quelconque de $[\![1, 2^{|n|+1}]\!]$ à $2^{|n|}$ éléments, alors que dans le processus de mots découpés dyadiques, on choisit soit les lettres d'indice 1 à $2^{|n|}$ (la moitié gauche), soit les lettres d'indice $2^{|n|} + 1$ à $2^{|n|+1}$ (la moitié droite).

En fait, le processus des mots découpés dyadiques randomisé ressemble au processus des mots gommés étudié par S. Laurent, dans lequel chaque mot est obtenu à partir du précédent en retirant une lettre dont la position est choisie au hasard de façon uniforme. Laurent [9, 10] a montré que la filtration du processus des mots gommés est de type produit. On peut en déduire le résultat suivant.

Proposition 16. *La filtration du processus des mots découpés dyadiques randomisé est de type produit.*

Démonstration. La filtration des mots découpés dyadiques randomisé est poly-adique. Grâce au théorème de Vershik rappelé dans l'introduction, il suffit de montrer qu'on peut l'immerger dans une filtration de type produit. Nous allons montrer qu'on peut l'immerger dans une filtration extraite de la filtration des mots gommés.

Par définition, le processus des mots gommés sur l'alphabet $\{a, b\}$ toute chaîne de Markov $(M_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ inhomogène, où pour tout $n \leq 0$,

1. (M_n, η_n) suit la loi uniforme sur $\{a, b\}^{|n|} \times [\![1, |n| + 1]\!]$,
2. η_n est indépendante de (M_{n-1}, η_{n-1}),
3. M_n est obtenu à partir de M_{n-1} en enlevant la lettre d'indice η_n.

À partir d'un processus de mots gommés $(M_n, \eta_n)_{n \leq 0}$, on obtient un processus de mots découpés randomisé en posant $W_n = M_{-2^{|n|}}$ et en notant I_n la partie de $[\![1, 2^{|n|+1}]\!]$ correspondant aux lettres de $M_{-2^{|n-1|}}$ qui sont gardées pour former le mot $M_{-2^{|n|}}$. Cette partie est une fonction du $2^{|n|}$-uplet $(\eta_{-2^{|n|+1}+1}, \dots, \eta_{-2^{|n|}})$. On vérifie que la filtration $(\mathcal{F}_n^{W,I})_{n \leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{F}_{-2^{|n|}}^{M,\eta})_{n \leq 0}$: la seule différence entre ces deux filtrations est que la première oublie l'ordre dans lequel sont retirées les lettres sur chaque intervalle de temps $[\![-2^{|n|+1} + 1, -2^{|n|}]\!]$, et cet ordre est indépendant du processus $(W_n, I_n)_{n \leq 0}$. $\square$

Proposition 17. *Pour tout $n \leq 0$, notons U_n la partition de $[\![1, 2^{|n|+1}]\!]$ définie par $U_n = \{I_n, [\![1, 2^{|n|+1}]\!] \setminus I_n\}$. Alors $U = (U_n)_{n \leq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes. Conditionnellement à U, la filtration $(\mathcal{F}^{W,I})_{n \leq 0}$ est kolomogorovienne mais non de type produit. Par conséquent, la filtration naturelle de $(U_n)_{n \leq 0}$ est $(c_n/2)_{n \leq 0}$-adique, immergée et maximale, mais non complémentable dans $(\mathcal{F}^{W,I})_{n \leq 0}$.*

Démonstration. Notons F_n l'ensemble des partitions de $[\![1, 2^{|n|+1}]\!]$ en deux blocs de taille $2^{|n|}$. L'application h_n qui à une partie $A \in E_n$ associe la partition $\{A, [\![1, 2^{|n|+1}]\!] \setminus A\}$ est « two to one » : chaque élément de F_n possède exactement deux antécédents, l'un contient 1 et l'autre non. Comme $U_n = h_n(I_n)$, on en déduit que $(U_n)_{n \leq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui engendre une filtration $(c_n/2)_{n \leq 0}$-adique.

Notons $V_n = \mathbf{1}_{[1 \notin I_n]}$. On vérifie que V_n est indépendante de U_n et de loi uniforme sur $\{0, 1\}$ et que $\sigma(U_n, V_n) = \sigma(I_n)$. L'indépendance des suites $(U_n)_{n \leq 0}$ et $(V_n)_{n \leq 0}$ montre que la filtration $(\mathcal{F}_n^U)_{n \leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{F}^I)_{n \leq 0}$ et donc $(\mathcal{F}^{W,I})_{n \leq 0}$.

Pour montrer la proposition 17, il suffit d'après la proposition 14 de vérifier que, conditionnellement à U, le processus $(W_n, I_n)_{n \leq 0}$ engendre une filtration de mots découpés dyadique, dont on sait qu'elle est kolmogorovienne mais non standard (voir [13]). Pour cela, nous utilisons à chaque instant $n \leq 0$ les variables aléatoires $U_{n+1}, \dots, U_0$ pour permuter les lettres de W_n. L'idée est de mettre à chaque étape dans la moitié gauche les lettres $W_n(i)$ pour i appartenant au même bloc que 1 et dans la moitié droite les autres.

Pour tout $n \leq 0$, pour tout $j \in [\![1, 2^{|n|}]\!]$, on note $U_n(j)$ le bloc de la partition U_n qui contient j et $R_n(j) = \mathrm{Card}(U_n(j) \cap [1, j])$ le rang de j dans le bloc $U_n(j)$. On définit par récurrence une application aléatoire Σ_n de $[\![1, 2^{|n|}]\!]$ dans $[\![1, 2^{|n|}]\!]$, en posant $\Sigma_0 = \mathrm{Id}_{\{1\}}$ et pour tout $n \leq 0$ et $j \in [\![1, 2^{|n|+1}]\!]$,

$$\Sigma_{n-1}(j) = \Sigma_n(R_n(j)) + 2^{|n|} \mathbf{1}_{1 \notin U_n(j)}.$$

Une récurrence montre que les applications Σ_n sont des permutations. En effet, si Σ_n est une permutation aléatoire de $[\![1, 2^{|n|}]\!]$, la relation de récurrence montre que Σ_{n-1}

induit une bijection strictement croissante de $U_n(1)$ sur $[\![1, 2^{|n|}]\!]$ et une bijection strictement croissante de $[\![1, 2^{|n|+1}]\!] \setminus U_n(1)$ sur $[\![2^{|n|}+1, 2^{|n|+1}]\!]$. Donc Σ_{n-1} est une permutation aléatoire de $[\![1, 2^{|n|+1}]\!]$. Et comme $U_n(1) = \Sigma_{n-1}^{-1}([\![1, 2^{|n|}]\!])$, la connaissance de Σ_{n-1} permet de retrouver U_n et Σ_n. On en déduit par récurrence que pour tout $n \leq 0$, $\sigma(\Sigma_n) = \sigma(U_{n+1}, \ldots, U_0)$.

Comme W_n, $(U_{n+1}, \ldots, U_0)$ et $(V_{n+1}, \ldots, V_0)$ sont indépendantes et comme W_n suit la loi uniforme sur $\{a, b\}^{2^{|n|}}$, on en déduit que la variable aléatoire $W'_n = W_n \circ \Sigma_n^{-1}$ suit la loi uniforme sur $\{a, b\}^{2^{|n|}}$ et que W'_n, $(U_{n+1}, \ldots, U_0)$ et $(V_{n+1}, \ldots, V_0)$ sont indépendantes. Le processus $(W'_n, V_n)_{n\leq 0}$ est donc indépendant du processus $(U_n)_{n\leq 0}$. Par ailleurs, pour tout $n \leq 0$,

$$\mathcal{F}_0^U \vee \mathcal{F}_n^{W',V} = \mathcal{F}_0^U \vee \mathcal{F}_n^{W,I} \quad \text{mod } \mathbf{P}.$$

D'après le lemme 3, pour $U(\mathbf{P})$-presque tout u, la filtration $(\mathcal{F}^{W,I})_{n\leq 0}$ vue sous $\mathbf{P}_u$ est isomorphe à la filtration naturelle de $(W'_n, V_n)_{n\leq 0}$ vue sous $\mathbf{P}$.

Vérifions que $(W'_n, V_n)_{n\leq 0}$ est un processus de mots découpés dyadique. Pour tout $n \leq 0$, notons $\Phi_n(1) < \ldots < \Phi_n(2^{|n|})$ les éléments de I_n. Alors pour tout $r \in [\![1, 2^{|n|}]\!]$,

$$\Sigma_{n-1}(\Phi_n(r)) = \Sigma_n(r) + 2^{|n|}V_n.$$

Donc pour tout $i \in [\![1, 2^{|n|}]\!]$,

$$\Sigma_{n-1}(\Phi_n(\Sigma_n^{-1}(i))) = i + 2^{|n|}V_n,$$

d'où, comme $W_n = W_{n-1} \circ \Phi_n$,

$$\begin{aligned} W'_n(i) &= W_n(\Sigma_n^{-1}(i)) \\ &= W_{n-1}(\Phi_n(\Sigma_n^{-1}(i))) \\ &= W_{n-1}(\Sigma_{n-1}^{-1}(i + 2^{|n|}V_n)) \\ &= W'_{n-1}(i + 2^{|n|}V_n). \end{aligned}$$

Autrement dit, le mot W'_n est la moitié gauche ou la moitié droite de W'_{n-1} suivant que V_n vaut 0 ou 1. Donc $(W'_n, V_n)_{n\leq 0}$ est un processus de mots découpés dyadique, ce qui achève la preuve. □

Signalons une question soulevée par le rapporteur. Il est naturel de vouloir déterminer quelles sont les suites $(t_n)_{n\leq 0}$ vérifiant la conclusion du théorème 11, c'est-à-dire telles que la filtration extraite $(\mathcal{U}_{t_n})_{n\leq 0}$ soit complémentable dans $(\mathcal{F}_{t_n}^{W,I})_{n\leq 0}$. Comme conditionnellement à U, le processus $(W_n, I_n)_{n\leq 0}$ engendre une filtration de mots découpés $(r_n)_{n\leq 0}$-adique, avec $r_n = 2^{t_n - t_{n-1}}$, la proposition 14 montre qu'une filtration de mots découpés $(r_n)_{n\leq 0}$-adique doit être de type produit pour que $(\mathcal{U}_{t_n})_{n\leq 0}$ soit complémentable dans $(\mathcal{F}_{t_n}^{W,I})_{n\leq 0}$. Cette condition nécessaire équivaut à

$$\sum_{n\leq 0} \frac{t_n - t_{n-1}}{2^{|t_n|}} = +\infty,$$

d'après la caracterisation des filtrations standard parmi les filtrations de mots découpés (see [4]). Cette condition est-elle suffisante ?

3.2 Un exemple utilisant les corps finis

Soit $q \geq 5$ un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier. Pour tout $n \leq 0$, on note K_n le corps à $q^{2^{|n|}}$ éléments. Soit $(Z_n)_{n\leq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \leq 0$,

$$Z_{2n-1} = E_n \text{ est uniforme sur } K_n \text{ et } Z_{2n} = (X_n, Y_n) \text{ est uniforme sur } K_n^2.$$

Notons $c_{2n-1} = q^{2^{|n|}}$ et $c_{2n} = q^{2^{|n|+1}}$. La filtration $(\mathcal{F}_n^Z)_{n\leq 0}$ est donc de type produit et $(c_n)_{n\leq 0}$-adique.

Pour tout $n \leq 0$, K_{n-1} a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur K_n. On peut donc identifier la variable aléatoire $Z_{2n-2} = (X_{n-1}, Y_{n-1})$ de loi uniforme sur K_{n-1}^2 à une variable aléatoire (A_n, B_n, C_n, D_n) de loi uniforme sur K_n^4. Notons

$$U_{2n-1} = 0_{K_n} \text{ et } U_{2n} = Y_n - A_nX_n^4 - B_nX_n^3 - C_nX_n^2 - D_nX_n - E_n \in K_n.$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n suivent la loi uniforme sur K_n, et $\mathcal{F}_{2n-1}^Z, X_n, Y_n$ sont indépendantes, tandis que $A_nX_n^4 + B_nX_n^3 + C_nX_n^2 + D_nX_n + E_n$ est $\mathcal{F}_{2n-1}^Z \vee \sigma(X_n)$-mesurable. Donc U_{2n} est indépendante de $\mathcal{F}_{2n-1}^Z \vee \sigma(X_n)$ et de loi uniforme sur K_n, si bien que (X_n, U_{2n}) est indépendante de $\mathcal{F}_{2n-1}^Z$ et de loi uniforme sur K_n^2.

On en déduit que les variables aléatoires $(U_n)_{n\leq 0}$ sont indépendantes, que la filtration $(\mathcal{F}_n^U)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{F}_n^Z)_{n\leq 0}$ et $(a_n)_{n\leq 0}$-adique, avec $a_{2n-1} = 1$ et $a_{2n} = q^{2^{|n|}}$ pour tout $n \leq 0$.

Proposition 18. *Notons $U = (U_n)_{n\leq 0}$. Conditionnellement à U, la filtration $(\mathcal{F}^Z)_{n\leq 0}$ est kolomogorovienne mais non de type produit. Par conséquent, la filtration naturelle de $(U_n)_{n\leq 0}$ est $(a_n)_{n\leq 0}$-adique, immergée et maximale, mais non complémentable dans $(\mathcal{F}^Z)_{n\leq 0}$.*

Démonstration. Notons υ la mesure de Haar sur le groupe additif $G = \prod_{n\leq 0} K_n$. Par construction, la suite de variables aléatoires $(Y_n - A_nX_n^4 - B_nX_n^3 - C_nX_n^2 - D_nX_n)_{n\leq 0}$ est mesurable pour $\mathcal{F}_0^{X,Y}$, tandis que la suite de variables aléatoires $(E_n)_{n\leq 0}$ est indépendante de $\mathcal{F}_0^{X,Y}$ et de loi υ. Par différence, $(U_{2n})_{n\leq 0}$ est elle aussi indépendante de $\mathcal{F}_0^{X,Y}$ et de loi υ.

Comme la suite $(U_{2n-1})_{n\leq 0}$ est déterministe, le processus $(Z_{2n})_{n\leq 0} = ((X_n, Y_n))_{n\leq 0}$ est donc indépendant de la suite $U = (U_n)_{n\leq 0}$. Par ailleurs, le processus $(Z_{2n-1})_{n\leq 0}$ est une fonction déterministe des processus $(Z_{2n})_{n\leq 0}$ et $(U_n)_{n\leq 0}$, puisque pour tout $n \leq 0$,

$$Z_{2n-1} = E_n = (Y_n - A_nX_n^4 - B_nX_n^3 - C_nX_n^2 - D_nX_n) - U_{2n}.$$

Notons $(\mathbf{P}_u)_{u\in G}$ une version régulière de la loi $\mathbf{P}$ sachant U. La loi du processus $(Z_n)_{n\leq 0}$ sous $\mathbf{P}_u$ est donc décrite comme suit : les variables aléatoires $(Z_{2n})_{n\leq 0}$ sont indépendantes et de loi uniforme sur les ensembles $(K_n^2)_{n\leq 0}$, et pour tout $n \leq 0$, Z_{2n-1} est une fonction déterministe de (Z_{2n-2}, Z_{2n}) donnée par

$$Z_{2n-1} = (Y_n - A_nX_n^4 - B_nX_n^3 - C_nX_n^2 - D_nX_n) - u_{2n}.$$

Sous $\mathbf{P}_u$, la filtration $(\mathcal{F}_{2n}^Z)_{n\leq 0}$ est de type produit donc la tribu asymptotique $\mathcal{F}_{-\infty}^Z$ est triviale. Mais nous allons montrer que la filtration $(\mathcal{F}_n^Z)_{n\leq 0}$ n'est pas de type produit, en niant le critère de I-confort, comme dans l'article [5]

Soient $(Z'_n)_{n\leq 0}$ et $(Z''_n)_{n\leq 0}$ deux copies définies sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbf{P}_u})$ du processus $(Z_n)_{n\leq 0}$ vu sous la loi $\mathbf{P}_u$, dont les filtrations naturelles $(\mathcal{F}^{Z'}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{F}^{Z''}_n)_{n\leq 0}$ sont immergées dans $(\mathcal{F}^{Z'}_n \vee \mathcal{F}^{Z''}_n)_{n\leq 0}$. L'argument-clé de la preuve est l'inégalité pour tout $n \leq 0$,

$$\overline{\mathbf{P}_u}[Z'_{2n} \neq Z''_{2n} | \mathcal{F}^{Z'}_{2n-2} \vee \mathcal{F}^{Z''}_{2n-2}] \geq (1 - 4/q^{2^{|n|}}) \mathbf{1}_{[Z'_{2n-2} \neq Z''_{2n-2}]}.$$

En effet, avec des notations évidentes, le point $Z'_{2n} = (X'_{2n}, Y'_{2n})$ se trouve sur le graphe de la fonction polynôme $x \mapsto A'_n x^4 + B'_n x^3 + C'_n x^2 + D'_n x + E'_n + u_n$ et de même pour $Z''_{2n} = (X''_{2n}, Y''_{2n})$. Si $(A'_n, B'_n, C'_n, D'_n) \neq (A''_n, B''_n, C''_n, D''_n)$ les deux graphes ont au plus quatre points en commun, et X'_{2n} doit être l'abscisse d'un de ces points pour qu'on puisse avoir $Z'_{2n} = Z''_{2n}$. Or par co-immersion, la loi de X'_{2n} sous $\overline{\mathbf{P}_u}[\cdot | \mathcal{F}^{Z'}_{2n-2} \vee \mathcal{F}^{Z''}_{2n-2}]$ est uniforme sur K_n. On en déduit l'inégalité.

Une récurrence montre que pour tout $n \leq 0$,

$$\overline{\mathbf{P}_u}[Z'_0 \neq Z''_0 | \mathcal{F}^{Z'}_{2n} \vee \mathcal{F}^{Z''}_{2n}] \geq \prod_{n-1\leq k\leq 0} (1 - 4/q^{2^{|k|}}) \mathbf{1}_{[Z'_{2n} \neq Z''_{2n}]}.$$

Si les copies $(Z'_n)_{n\leq 0}$ et $(Z''_n)_{n\leq 0}$ sont indépendantes jusqu'à un certain instant $N > -\infty$, on en déduit que

$$\overline{\mathbf{P}_u}[Z'_0 \neq Z''_0] \geq \prod_{k\leq 0} (1 - 4/q^{2^{|k|}}) > 0,$$

ce qui montre que la variable aléatoire Z_0 ne vérifie pas le critère de I-confort.

Ainsi, la filtration $(\mathcal{F}^Z_n)_{n\leq 0}$ est kolmogorovienne mais pas de type produit sous les probabilités $(\mathbf{P}_u)_{u\in G}$. Le même argument que pour le premier exemple montre que $(\mathcal{F}^U_n)_{n\leq 0}$ est maximale mais non complémentable dans $(\mathcal{F}^Z_n)_{n\leq 0}$. □

4 Pseudo-distances de Kantorovitch-Rubinstein

Les distances de Kantorovitch-Rubinstein (ou distances de Wasserstein L^1) jouent un rôle important dans la théorie de Vershik, et on ne sera pas surpris de les rencontrer ici. Nous rappelons ici la définition, et nous énonçons quelques lemmes utiles par la suite.

Dans toute cette section, $(E, \mathcal{E})$ désignera un espace mesurable et d une pseudo-distance bornée et mesurable sur $(E, \mathcal{E})$. On notera Δ le diamètre de (E, d).

Si μ et ν sont deux probabilités sur E (muni de la tribu borélienne), on définit la pseudo-distance de Kantorovitch-Rubinstein entre μ et ν par

$$d(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{E^2} d(x, y) \mathrm{d}\pi(x, y),$$

où $\Pi(\mu, \nu)$ est l'ensemble des probabilités sur E^2 de marges μ et ν. On obtient ainsi une pseudo-distance sur l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{E})$.

Commençons par un lemme élémentaire.

Lemme 19. *Si μ et ν sont deux probabilités sur E portées par un ensemble fini $\{c_1, \ldots, c_\ell\}$, alors*

$$d(\mu, \nu) \leq \Delta \sum_{k=1}^{\ell} [\mu(c_k) - \nu(c_k)]_+ = \Delta \sum_{k=1}^{\ell} [\nu(c_k) - \mu(c_k)]_+ = \frac{\Delta}{2} \sum_{k=1}^{\ell} |\mu(c_k) - \nu(c_k)|.$$

Démonstration. On construit sur un même espace probabilisé deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{c_1, \ldots, c_\ell\}$, de lois respectives μ et ν, telles que

$$\mathbf{P}[X = Y] = \sum_{k=1}^{\ell} \mu(c_k) \wedge \nu(c_k).$$

Comme $d(X, Y) \leq \Delta\ \mathbf{1}_{[X \neq Y]}$, on a donc

$$d(\mu, \nu) = \mathbf{E}[d(X, Y)] \leq \Delta \mathbf{P}[X \neq Y] = \Delta \sum_{k=1}^{\ell} (\mu(c_k) - \mu(c_k) \wedge \nu(c_k)).$$

On en déduit les égalités annoncées. □

Calculer $d(\mu, \nu)$ est souvent compliqué en pratique, mais pour des isobarycentres de n masses de Dirac, on dispose du résultat classique suivant.

Lemme 20. *Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ dans E, non nécessairement distincts.*

$$\text{Si } \mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_k} \text{ et } \nu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{b_k}, \text{ alors } d(\mu, \nu) = \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(a_k, b_{\sigma(k)}).$$

Démonstration. Notons υ la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On vérifie que l'image par l'application $(i, j) \mapsto (a_i, b_j)$ de toute probabilité $\gamma \in \Pi(\upsilon, \upsilon)$ est une probabilité $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, et réciproquement : il suffit de poser

$$\gamma(i, j) = \pi(a_i, b_j) / |\{(k, l) \in [\![1, n]\!]^2 : (a_k, b_l) = (a_i, b_j)\}|.$$

Par ailleurs, les probabilités de $\Pi(\upsilon, \upsilon)$ sont exactement les mesures données par $\gamma(i, j) = m_{i,j}/n$, où $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice bistochastique. Donc

$$d(\mu, \nu) = \inf_{M} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i,j \leq n} d(a_i, b_j) m_{i,j},$$

où M parcourt l'ensemble des matrices bistochastiques La quantité à minimiser dépend linéairement de M. Comme l'ensemble des matrices bistochastiques est l'enveloppe convexe des matrices de permutation, la borne inférieure est atteinte en une matrice de permutation. □

Dans la preuve du théorème 11, nous utiliserons aussi le fait que toute probabilité sur un espace métrique précompact peut être approchée en distance de Kantorovitch-Rubinstein par un isobarycentre de masses de Dirac.

Lemme 21. *Supposons que (E, d) est précompact (pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ε). À toute loi μ sur E, on peut associer une famille de points $(r_{n,k}(\mu))_{n \geq k \geq 1}$ de E, dépendant de façon mesurable de μ, telle que les lois*

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{r_{n,k}(\mu)}$$

vérifient $d(\mu, \nu_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Démonstration. Par précompacité de E, on peut construire une suite d'ensembles finis $F_n = \{c_{n,1}, ..., c_{n,\ell(n)}\}$ telle que

$$1 << \ell_n << n \text{ et } \Delta_n := \sup_{x\in E} d(x, F_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Pour chaque $n \geq 1$, soit f_n l'application de E dans E définie par

$$f_n(x) = c_{n,K_n(x)} \text{ où } K_n(x) = \min\{k \in [\![1, \ell_n]\!] : d(x, c_{n,k}) = d(x, F_n)\}.$$

Alors f_n est mesurable et $d(x, f_n(x)) \leq \Delta_n$ pour tout $x \in E$, donc $d(\mu, f_n(\mu)) \leq \Delta_n$. Posons (en notant $\lfloor\cdot\rfloor$ la partie entière)

$$f_n(\mu) = \sum_{k\in[\![1,\ell_n]\!]} \alpha_{n,k}\delta_{c_{n,k}} \text{ et } \nu_n = \sum_{k\in[\![1,\ell_n]\!]} \frac{\lfloor n\alpha_{n,k}\rfloor}{n}\delta_{c_{n,k}} + \Big(1 - \sum_{k\in[\![1,\ell_n]\!]} \frac{\lfloor n\alpha_{n,k}\rfloor}{n}\Big)\delta_{c_{n,1}}.$$

D'après le lemme 19, $d(f_n(\mu), \nu_n) \leq (\Delta/2)(\ell_n/n)$. Ainsi, $d(\mu, \nu_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Par ailleurs, ν_n s'écrit comme isobarycentre de n masses de Dirac, en des points $r_{n,1}, \ldots, r_{n,n}$ obtenus en répétant $c_{n,1}, ..., c_{n,\ell(n)}$ autant de fois que nécessaire. Ces points ne dépendent de μ que par les valeurs $\mu[K_n = k]$ pour $k \in [\![1, \ell_n]\!]$, et les formules ci-dessus montrent que cette dépendance est mesurable. □

Nous appliquerons ce lemme à l'espace $[0, 1]$ muni de diverses pseudo-distances. Si l'on travaillait seulement avec la distance usuelle il aurait suffi de prendre $r_{n,k}(\mu)$ égal au quantile de niveau $(2k - 1)/(2n)$ de la loi μ.

Les pseudo-distances que nous allons introduire sur $[0, 1]$ sont obtenues par composition d'une distance avec une application borélienne bornée. Nous aurons également besoin du lemme suivant.

Lemme 22. *Soit H une application borélienne bornée de $[0, 1]$ dans un espace métrique (E, d). On définit une pseudo-distance d_H sur $[0, 1]$ par $d_H(r, r') = d(H(r), H(r'))$. Soient μ et ν deux probabilités sur $[0, 1]$. Notons $H(\mu)$ et $H(\nu)$ les mesures images par H de μ et ν. Alors $d_H(\mu, \nu) = d(H(\mu), H(\nu))$.*

Démonstration. Si $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, alors la mesure image de π par l'application $(x, y) \mapsto (H(x), H(y))$ est dans $\Pi(H(\mu), H(\nu))$. Pour montrer l'égalité ci-dessus, il suffit de montrer que tout couplage appartenant à $\Pi(H(\mu), H(\nu))$ peut s'obtenir de cette façon.

Soit (U, V) une variable aléatoire à valeurs dans $E \times E$ telle que U suive la loi $H(\mu)$ et V suive la loi $H(\nu)$. On cherche à construire une variable aléatoire (X, Y) telle que $(H(X), H(Y)) = (U, V)$ presque sûrement. Une façon de faire est de prendre une variable aléatoire T indépendante de (U, V), à valeurs dans $]0, 1[$, de loi uniforme, et de poser

$$(X, Y) = (F^{\leftarrow}(U, T), G^{\leftarrow}(V, T)),$$

où $F(u, \cdot)$ et $G(v, \cdot)$ sont les fonctions de répartition conditionnelles de X sachant que $H(X) = u$ et de Y sachant que $H(Y) = v$, et $F^{\leftarrow}(u, \cdot)$ et $G^{\leftarrow}(v, \cdot)$ leurs inverses continus à gauche : pour tout $t \in]0, 1[$,

$$F^{\leftarrow}(u, t) = \inf\{x \in \mathbf{R} : F(u, x) \geq t\} \text{ et } G^{\leftarrow}(v, t) = \inf\{x \in \mathbf{R} : G(v, x) \geq t\}.$$

En effet, par indépendance de U et de T, on a pour P_U-presque tout $u \in E$

$$\mathcal{L}\big(F^{\leftarrow}(U, T)\big|U = u\big) = \mathcal{L}\big(F^{\leftarrow}(u, T)\big) = \mathcal{L}\big(X\big|H(X) = u\big).$$

Comme U et $H(X)$ ont même loi, $(F^{\leftarrow}(U,T),U)$ et $(X,H(X))$ ont donc loi. En particulier, $F^{\leftarrow}(U,T)$ a pour loi μ et $H(F^{\leftarrow}(U,T)) = U$ presque sûrement. On raisonne de même avec V. $\square$

Enfin, nous utiliserons le fait suivant.

Lemme 23. *Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et μ des probabilités sur sur un espace métrique précompact (E,d). Si $\mu_n \to \mu$ étroitement, alors $d(\mu,\mu_n) \to 0$.*

Démonstration. Supposons que $\mu_n \to \mu$ étroitement, et fixons $\varepsilon > 0$. On peut recouvrir (E,d) par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε. Notons $c_1,\ldots,c_\ell$ leurs centres. Pour chaque $k \in [\![1,\ell_n]\!]$, notons D_k l'ensemble des atomes de la mesure image de μ par l'application $x \mapsto d(c_k,x)$ de E dans $\mathbf{R}$. Notons D l'union des D_k. Alors D est dénombrable, et pour tout $r \in \mathbf{R}_+ \setminus D$, l'union des sphères $S(c_k,r)$ est de mesure nulle pour μ.

Fixons $r \in [\varepsilon, 2\varepsilon] \setminus D$. Les boréliens

$$A_1 = B(c_1,r), A_2 = B(c_2,r) \setminus B(c_1,r), \ldots, A_\ell = B(c_\ell,r) \setminus \bigcap_{k=1}^{\ell-1} B(c_k,r)$$

forment une partition de E et pour tout $k \in [\![1,\ell_n]\!]$, $\partial A_k \subset S(c_1,r) \cup \cdots \cup S(c_k,r)$ donc $\mu(\partial A_k) = 0$ et $\mu_n(A_k) \to \mu(A_k)$ quand $n \to +\infty$.

Soit f l'application de E dans E définie par $f(x) = c_k$ si $x \in A_k$. Alors $d(x,f(x)) \leq r$ pour tout $x \in E$, donc pour toute probabilité ν sur E, $d(\nu, f(\nu)) \leq r \leq 2\varepsilon$. Notons Δ le diamètre de (E,d). Grâce au lemme 19, on a pour tout $n \geq 1$,

$$d(\mu,\mu_n) \leq 4\varepsilon + d(f(\mu), f(\mu_n)) \leq 4\varepsilon + \frac{\Delta}{2} \sum_{k=1}^{\ell} |\mu(A_k) - \mu_n(A_k)|.$$

Donc $d(\mu,\mu_n) \leq 5\varepsilon$ à partir d'un certain rang, ce qui achève la preuve. $\square$

5 Démonstration du théorème 11

5.1 Complément pour les innovations

La première étape de la preuve du théorème 11 consiste à montrer que si $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ et $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ sont des filtrations poly-adiques et si $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, alors toute suite d'innovations de $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ peut être complétée par une suite indépendante pour fournir une suite d'innovations de $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.

Lemme 24. *Soient $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(c_n)_{n\leq 0}$-adique et $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ une filtration $(a_n)_{n\leq 0}$-adique immergée dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$. Soit $(U_n)_{n\leq 0}$ une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$, à valeurs dans les ensembles $([\![1,a_n]\!])_{n\leq 0}$.*

Alors pour tout $n \leq 0$, on a $c_n = a_n b_n$ avec $b_n \in \mathbf{N}$. De plus, il existe une suite $(V_n)_{n\leq 0}$ de variables aléatoires uniformes sur les ensembles $([\![1,b_n]\!])_{n\leq 0}$ telles que pour tout $n \leq 0$, $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{n-1} \vee \sigma(U_n,V_n) \mod \mathbf{P}$, avec $\mathcal{Z}_{n-1}, U_n, V_n$ indépendantes. En particulier, $((U_n,V_n))_{n\leq 0}$ est une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.

Démonstration. Par immersion de $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$,

$$\mathcal{L}(U_n|\mathcal{Z}_{n-1}) = \mathcal{L}(U_n|\mathcal{U}_{n-1}) = \mathrm{Unif}([\![1, a_n]\!]) \text{ p.s..} \tag{1}$$

En particulier, U_n est indépendante de $\mathcal{Z}_{n-1}$.

Soit $(Z_n)_{n\leq 0}$ une suite d'innovations pour la filtration $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, à valeurs dans les ensembles $([\![1, c_n]\!])_{n\leq 0}$. Pour chaque $n \leq 0$, notons R_n une variable aléatoire réelle engendrant $\mathcal{Z}_n$ (modulo $\mathbf{P}$).

Comme U_n est mesurable pour $\mathcal{Z}_n$ et $\mathcal{Z}_n = \sigma(R_{n-1}) \vee \sigma(Z_n) \mod \mathbf{P}$, il existe une fonction mesurable f_n de $\mathbf{R} \times [\![1, c_n]\!]$ dans $[\![1, a_n]\!]$ telle que $U_n = f_n(R_{n-1}, Z_n)$ presque sûrement. Mais R_{n-1} est mesurable pour $\mathcal{Z}_{n-1}$ tandis que Z_n est indépendante de $\mathcal{Z}_{n-1}$ et de loi uniforme dans $[\![1, c_n]\!]$, on a donc

$$\mathcal{L}(U_n|\mathcal{Z}_{n-1}) = f_n(R_{n-1}, \cdot)\big(\mathrm{Unif}([\![1, c_n]\!])\big) \text{ p.s..} \tag{2}$$

Les égalités 1 et 2 montrent que pour tout $u \in [\![1, a_n]\!]$,

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{c_n}|f_n(R_{n-1}, \cdot)^{-1}(u)| \text{p.s..}$$

Donc $c_n = a_n b_n$ avec $b_n \in \mathbf{N}$, et $R_{n-1}(\mathbf{P})$-presque tout $r \in \mathbf{R}$, l'application $f(r, \cdot)$ est « b_n to one » : chaque élément $v \in [\![1, a_n]\!]$ possède exactement b_n antécédents.

Pour chaque $z \in [\![1, c_n]\!]$, notons $g(r, z)$ le numéro d'ordre de z parmi les b_n antécédents de $f(r, z)$. Alors l'application $z \mapsto (f(r, z), g(r, z))$ est une bijection de $[\![1, c_n]\!]$ vers $[\![1, a_n]\!] \times [\![1, b_n]\!]$, et dépend de façon mesurable de r. Posons $V_n = g_n(R_{n-1}, Z_n)$. La variable aléatoire (U_n, V_n) est obtenue à partir de Z_n en appliquant la bijection aléatoire $(f(R_{n-1}, \cdot), g(R_{n-1}, \cdot))$ qui ne dépend que de R_{n-1}. Donc (U_n, V_n) est indépendante de R_{n-1}, de loi uniforme sur $[\![1, a_n]\!] \times [\![1, b_n]\!]$ et $\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{n-1} \vee \sigma(U_n, V_n) \mod \mathbf{P}$, ce qui montre le lemme. □

Remarque 25. *La suite $(V_n)_{n\leq 0}$ fournie par le lemme 24 est indépendante de $\mathcal{U}'_0$ (avec les notations du théorème 6).*

Démonstration. Soit $n \leq 0$. D'après le théorème 6, $\mathcal{U}'_0 = \mathcal{U}'_n \vee \sigma(U_{n+1}, \ldots, U_0) \mod \mathbf{P}$. Comme $\mathcal{Z}_n$, $(U_{n+1}, \ldots, U_0)$ et $(V_{n+1}, \ldots, V_0)$ sont indépendantes, $(V_{n+1}, \ldots, V_0)$ est indépendante de $\mathcal{U}'_0$, ce qui montre le résultat. □

5.2 Preuve du résultat principal

Gardons les notations du lemme 24. Nous voulons montrer que si $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ est maximale dans $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$, alors on peut construire une subdivision $(t_n)_{n\leq 0}$ de $\mathbf{Z}_-$ telle que la filtration $(\mathcal{U}_{t_n})_{n\leq 0}$ soit complémentable par une filtration de type produit dans la filtration $(\mathcal{Z}_{t_n})_{n\leq 0}$.

Par commodité, on introduit une suite $(R_n)_{n\leq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$ telle que pour tout $n \leq 0$, R_n engendre $\mathcal{Z}_n$ (modulo $\mathbf{P}$).

Par hypothèse, la filtration $(\mathcal{U}_n)_{n\leq 0}$ possède une suite d'innovations $(U_n)_{n\leq 0}$, de lois uniformes sur les ensembles $([\![1, a_n]\!])_{n\leq 0}$. Le lemme 24 fournit une suite $(V_n)_{n\leq 0}$ de variables aléatoires, indépendante de $(U_n)_{n\leq 0}$, de lois uniformes sur les ensembles $([\![1, b_n]\!])_{n\leq 0}$, telle que $((U_n, V_n))_{n\leq 0}$ est une suite d'innovations de la filtration $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$.

À l'aide des propriétés établies à la section 4, nous allons modifier la suite $(V_n)_{n\leq 0}$ pour obtenir une suite $(V'_n)_{n\leq 0}$ indépendante de $(U_n)_{n\leq 0}$ et de même loi que $(V_n)_{n\leq 0}$, telle que la filtration naturelle de $((U_n,V'_n))_{n\leq 0}$ coïncide avec $(\mathcal{Z}_n)_{n\leq 0}$ en une infinité d'instants.

Nous sommes amenés à grouper les innovations en paquets : pour $s\leq t\leq 0$, notons $U_{s,t}=(U_{s+1},\dots,U_t)$ et $V_{s,t}=(V_{s+1},\dots,V_t)$. Ces variables aléatoires sont à valeurs dans les ensembles finis

$$A_{s,t}=\prod_{s<k\leq t}[\![1,a_k]\!] \text{ et } B_{s,t}=\prod_{s<k\leq t}[\![1,b_k]\!].$$

Comme $\mathcal{Z}_t=\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t},V_{s,t}) \mod \mathbf{P}$, il existe une application mesurable $h_{s,t}$ de $[0,1]\times A_{s,t}\times B_{s,t}$ dans $[0,1]$ telle que $R_t=h_{s,t}(R_s,U_{s,t},V_{s,t})$. De plus, comme $(U_{s,t},V_{s,t})$ est indépendante de $\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t})$, la loi conditionnelle de R_t sachant $\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t})$ est

$$\mathcal{L}(R_t|\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t}))=\frac{1}{|B_{s,t}|}\sum_{v\in B_{s,t}}\delta_{h_{s,t}(R_s,U_{s,t},v)}.$$

Commençons par établir le résultat suivant

Lemme 26. *Soit $t\leq 0$. Notons $C_t=A_{t,0}\times B_{t,0}$. Soit H une application borélienne de $[0,1]$ dans $[0,1]^{C_t}$. Munissons $\mathbf{R}^{C_t}$ de norme $|\cdot|_1$ définie comme la moyenne des valeurs absolues des coordonnées et $[0,1]^{C_t}$ de la distance d_1 induite. Soit d_H la pseudo-distance sur $[0,1]$ définie par $d_H(r,r')=|H(r)-H(r')|_1$. Quand $s\to-\infty$, la loi conditionnelle $\mathcal{L}(R_t|\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t}))$ tend presque sûrement vers la loi conditionnelle $\mathcal{L}(R_t|\mathcal{U}_t)$ pour la pseudo-distance de Kantorovitch - Rubinstein associée à d_H.*

Démonstration. D'après le théorème 8, on sait que pour tout $t\leq 0$,

$$\mathcal{U}_t=\bigcap_{s\leq 0}(\mathcal{U}_t\vee\mathcal{Z}_s).$$

Mais pour tout $s\leq t, \mathcal{U}_t=\mathcal{U}_s\vee\sigma(U_{s,t})$, donc $\mathcal{U}_t\vee\mathcal{Z}_s=\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t})$. D'après le théorème de convergence des martingales, pour tout borélien B de $[0,1]$,

$$\mathbf{P}[R_t\in B|\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t})]\to\mathbf{P}[R_t\in B|\mathcal{U}_t] \text{ p.s. quand } s\to-\infty.$$

Par conséquent, pour tout borélien B de $[0,1]^{C_t}$,

$$\mathbf{P}[H(R_t)\in B|\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t})]\to\mathbf{P}[H(R_t)\in B|\mathcal{U}_t] \text{ p.s. quand } s\to-\infty.$$

En appliquant ce résultat aux pavés à sommets dans $\mathbf{Q}^{C_t}$, on en déduit que, presque sûrement, la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(H(R_t)|\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t})])$ converge vers celle de $\mathcal{L}(H(R_t)|\sigma(\mathcal{U}_t))$ en tout point de continuité de cette dernière, d'où

$$\mathcal{L}(H(R_t)|\mathcal{Z}_s\vee\sigma(U_{s,t})])\longrightarrow\mathcal{L}(H(R_t)|\sigma(\mathcal{U}_t)) \text{ étroitement.}$$

Comme ces lois sont portées par $[0,1]^{C_t}$, le lemme 23 montre la convergence pour la distance de Kantorovitch - Rubinstein associée à d_1. On conclut grâce au lemme 22. □

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 11.

Pour alléger les notations, nous utiliserons le symbole $\mathbb{M}$ pour désigner la moyenne arithmétique : pour toute famille finie non vide $(x_k)_{k\in F}$ de réels,

$$\mathop{\mathbb{M}}_{k\in F} x_k=\frac{1}{|F|}\sum_{k\in F}x_k.$$

Nous allons construire une subdivision $(t_n)_{n\leq 0}$ de $\mathbf{Z}_-$ et une suite de variables aléatoires $(V'_{t_{n-1},t_n})_{n\leq 0}$ à valeurs dans les ensembles $(B_{t_{n-1},t_n})_{n\leq 0}$ telle que pour tout $n \leq 0$, $(U_{t_{n-1},t_n}, V'_{t_{n-1},t_n})$ soit indépendante de $\mathcal{Z}_{t_{n-1}}$, de même loi que $(U_{t_{n-1},t_n}, V_{t_{n-1},t_n})$ et telle que

$$\mathcal{Z}_{t_n} = \mathcal{Z}_{t_{n-1}} \vee \sigma(U_{t_{n-1},t_n}, V_{t_{n-1},t_n}).$$

On procède par récurrence, en commençant avec $t_0 = 0$.

Soit $n \leq 0$. Supposons construits $t_n < \cdots < t_0$ et $V'_{t_n,t_{n+1}}, \ldots, V'_{t_{-1},t_0}$. Alors

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}_{t_n} \vee \sigma(U_{t_n,t_0}, V'_{t_n,t_0}) \mod \mathbf{P}.$$

Donc

$$R_0 = h_n(R_{t_n}, U_{t_n,t_0}, V'_{t_n,t_0}) \text{ p.s.},$$

avec h_n mesurable de $[0,1] \times C_{t_n}$ dans $[0,1]$. Notons H_n l'application mesurable de $[0,1]$ dans $[0,1]^{C_{t_n}}$ définie par

$$H_n(r) = (h_n(r,u,v))_{(u,v)\in C_{t_n}}.$$

On applique alors le lemme 26 à l'application H_n : presque sûrement, quand $s \to -\infty$, la loi conditionnelle $\mathcal{L}(R_{t_n}|\mathcal{Z}_s \vee \sigma(U_{s,t_n}))$ tend vers la loi conditionnelle $\mathcal{L}(R_{t_n}|\mathcal{U}_{t_n})$ pour la pseudo-distance de Kantorovitch - Rubinstein associée à d_{H_n}. Mais

$$\mathcal{L}(R_{t_n}|\mathcal{Z}_s \vee \sigma(U_{s,t_n})) = \mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{s,t_n}} \delta_{h_{s,t}(R_s,U_{s,t_n},v)}.$$

Par ailleurs, grâce au lemme 21, la loi $\mathcal{L}(R_{t_n}|\mathcal{U}_{t_n})$ peut être approchée en distance d_{H_n} par une loi de la forme

$$\mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{s,t_n}} \delta_{\Upsilon_n(v)},$$

où les variables aléatoires $\Upsilon_n(v)$ sont mesurables pour $\mathcal{U}_{t_n}$. Ainsi, presque sûrement,

$$d_{H_n}\Big(\mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{s,t_n}} \delta_{h_{s,t_n}(R_s,U_{s,t_n},v)}\ ,\ \mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{s,t_n}} \delta_{\Upsilon_n(v)}\Big) \to 0.$$

Comme toutes les distances sont bornées par 1, il y a convergence dans $L^1(\mathbf{P})$. On choisit $t_{n-1} < t_n$ de telle sorte que la variable aléatoire

$$D_n = d_n\Big(\mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{t_{n-1},t_n}} \delta_{h_{t_{n-1},t_n}(R_{t_{n-1}},U_{t_{n-1},t_n},v)}\ ,\ \mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{t_{n-1},t_n}} \delta_{\Upsilon_n(v)}\Big)$$

vérifie $\mathbf{E}[D_n] \leq 2^{n-1}$. Mais d'après le lemme 20,

$$D_n = \min_{\sigma\in\mathfrak{S}(B_{t_{n-1},t_n})} \mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{t_{n-1},t_n}} d_n\big(h_{t_{n-1},t_n}(R_{t_{n-1}}, U_{t_{n-1},t_n}, v)\ ,\ \Upsilon_n(\sigma(v))\big).$$

On choisit une permutation aléatoire Σ_n, mesurable pour $\mathcal{Z}_{t_{n-1}} \vee \sigma(U_{t_{n-1},t_n})$, qui réalise le minimum ci-dessus, et on note $V'_{t_{n-1},t_n} = \Sigma_n(V_{t_{n-1},t_n})$. Alors V'_{t_{n-1},t_n} est mesurable pour $\mathcal{Z}_{t_n}$, est indépendante de $\mathcal{Z}_{t_{n-1}} \vee \sigma(U_{t_{n-1},t_n})$ et de loi uniforme sur B_{t_{n-1},t_n}, ce qui achève la construction par récurrence.

Avec ces notations, on a donc

$$\begin{aligned} D_n &= \mathop{\mathrm{M}}_{v\in B_{t_{n-1},t_n}} d_n\big(h_{t_{n-1},t_n}(R_{t_{n-1}}, U_{t_{n-1},t_n}, v)\ ,\ \Upsilon_n(\Sigma_n(v))\big) \\ &= \mathbf{E}\big[d_n\big(R_{t_n}, \Upsilon_n(V'_{t_{n-1},t_n})\big)\big|\mathcal{Z}_{t_{n-1}} \vee \sigma(U_{t_{n-1},t_n})\big] \text{ p.s.,} \end{aligned}$$

car $R_{t_n} = h_{t_{n-1},t_n}(R_{t_{n-1}}, U_{t_{n-1},t_n}, V_{t_{n-1},t_n})$ p.s. Mais

$$\begin{aligned} d_n\big(R_{t_n}, \Upsilon_n(V'_{t_{n-1},t_n})\big) &= \big|H_n(R_{t_n}) - H_n(\Upsilon_n(V'_{t_{n-1},t_n}))\big|_1 \\ &= \mathbf{E}\Big[\big|h_n(R_{t_n}, U_{t_n,0}, V'_{t_n,0}) - h_n(\Upsilon_n(V'_{t_{n-1},t_n}), U_{t_n,0}, V'_{t_n,0})\big|\Big|\mathcal{Z}_{t_n}\Big], \end{aligned}$$

puisque $(U_{t_n,0}, V'_{t_n,0})$ est indépendante de $\mathcal{F}^Z_{t_n}$ et de loi uniforme sur K_n.

Notons $S_n = h_n(\Upsilon_n(V'_{t_{n-1},t_n}), U_{t_n,0}, V'_{t_n,0})$. Alors S_n est mesurable pour $\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{F}^{V'}_0$ et $\mathbf{E}[D_n] = \mathbf{E}\big[|R_0 - S_n|\big]$ tend vers 0 quand $n \to -\infty$. Donc R_0 est mesurable (aux événements négligeables près) pour $\mathcal{U}_0 \vee \mathcal{F}^{V'}_0$.

La filtration $(\mathcal{U}_{t_n} \vee \mathcal{F}^{V'}_{t_n})_{n\leq 0}$ est non seulement incluse mais aussi immergée dans $(\mathcal{Z}_{t_n})_{n\leq 0}$, puisque ces deux filtrations admettent une même suite d'innovations, à savoir $((U_{t_{n-1},t_n}, V'_{t_{n-1},t_n}))_{n\leq 0}$. Elles sont donc égales (aux événements négligeables près) puisque les tribus à l'instant 0 le sont.

Remerciements

Je remercie J. Brossard, M. Émery et S. Laurent pour les échanges stimulants ainsi que le rapporteur pour sa relecture attentive et ses suggestions. Ils m'ont donné l'occasion d'améliorer la présentation et certains résultats de cet article.

Références

[1] M.T. Barlow, M. Émery, F.B. Knight, S. Song, M. Yor, *Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non browniennes*, Séminaire de Probabilités, XXXII, Lecture Notes in Mathematics **1686**, 264–305 (1998).

[2] J. Brossard, M. Émery, C. Leuridan, *Maximal Brownian motions*, Annales de l'IHP **45**-3, 876–886 (2009).

[3] J. Brossard, M. Émery, C. Leuridan, *Filtrations browniennes et compléments indépendants*, Séminaire de Probabilités, XLI, **1**, 265–278 (2008).

[4] G. Ceillier, *The filtration of the split-words process.* Probability Theory and Related Fields, **153**, no 1-2, 269–292 (2012).

[5] G. Ceillier, C. Leuridan, *Filtrations at the threshold of standardness.* Probability Theory and Related Fields, **158**, no 3-4, 785–808 (2014).

[6] M. Émery, W. Schachermayer, *On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness.* Séminaire de Probabilités, XXXV, **1755**, 265–305 (2001).

[7] R. von Handel, *On the exchange of intersection and supremum of σ-fileds in filtering theory* Israel Journal of Mathematics **192**, 763-784 (2012).

[8] S. Laurent, *On Vershikian and I-cosy random variables and filtrations.* (Russian summary) Teor. Veroyatn. Primen. 55, no. 1, 104–132 (2010) ; translation in Theory Probab. Appl. 55, no. 1, 54–76 (2011).

[9] S. Laurent *Filtrations à temps discret négatif*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Institut de Recherche en Mathématique Avancée, Strasbourg (2004).

[10] S. Laurent, *The filtration of the erased-word processes.* https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00999719v3

[11] D. Ornstein, *Factors of Bernoulli shifts*, Israel Journal of Mathematics, **21**-2-3, 145–153 (1975).

[12] D. Ornstein, B. Weiss, *Finitely determined implies very weak Bernoulli*, Israel Journal of Mathematics, **17**-1, 94–104 (1974).

[13] M. Smorodinsky, *Processes with no standard extension*. Israel Journal of Mathematics, **107**, 327–331 (1998).

[14] M. Tsirelson, *About Yor's problem*. Unpublished notes. http ://www.tau.ac.il/ tsirel/download/yor.html

[15] A. Vershik, *Theory of decreasing sequences of measurable partitions*. Algebra i Analiz, **6** :4 (1994), 1–68. English Tranlation : St. Petersburg Mathematical Journal, **6** :4 (1995), 705–761.

[16] H. von Weizsäcker, *Exchanging the order of taking suprema and countable intersections of σ-algebras*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B, **19**, no. 1, 91–100 (1983).